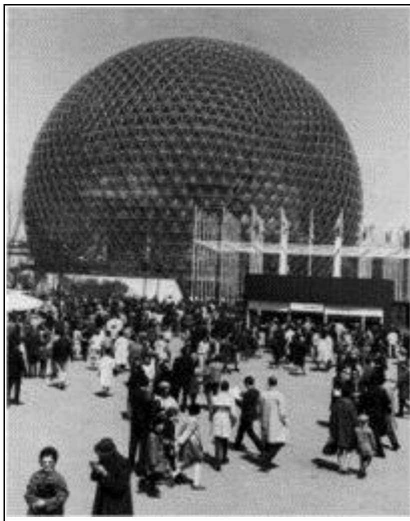
Zusammenspiel: Mathematik und Architektur



Geodesic Dome von Buckminster Fuller auf der Weltausstellung in Montreal, 1967.

von Prof. Dr. Jürgen Richter und Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp

Dieser Artikel gliedert sich in folgende Abschnitte:

Einleitung

Sternkörper auf dem Fußboden von San Marco in Venedig.

Das Verhältnis von Mathematik und Architektur ist ein spannungsreiches Wechselspiel von Inspiration und Emanzipation, Notwendigkeit und gestalterischer Freiheit, Formenvielfalt und Beschränkung auf das Wesentliche. Während es in der Mathematik die Möglichkeit gibt, Strukturen losgelöst von materiellen Beschränkungen zu studieren, ist die Architektur dazu "verdammt", umsetzbar sein zu müssen. Der Mathematik wird dadurch in der Architektur eine doppelte Rolle zuteil. Einerseits ist die Mathematik als Grundlage von Baustatik, Materialphysik und räumlicher Formgebung oftmals notwendiger Prüfstein der Umsetzbarkeit. Dabei ermöglichen heute neue mathematische Techniken, insbesondere unter der Einbeziehung von Computern, auch die Umsetzung von neuen Gebäudekonzepten. Andererseits ist die Mathematik ein reichhaltiger Quell von Strukturen und Metaphern, deren Umsetzung in Gebäude, Städte oder Räume oftmals als Inspiration und Motivation für Architekten dient. Dieses Zusammenspiel lässt sich in veränderter Ausprägung über mehrere Jahrhunderte, gar Jahrtausende, zurückverfolgen. Die Auswahl der von Architekten und Baumeistern umgesetzten Strukturen ist hierbei häufig ein Spiegel der Zeit, der Funktion und Bedeutung des Gebäudes und der kulturellen Themen und Aktivitäten eines Volkes. Durch die Tatsache, dass sich in der Auswahl mathematischer Grundformen auch immer ein Stück

"Zeitgeist" widerspiegelt, wird das Verhältnis von Mathematik und Architektur zwangsweise ein dialektisches.

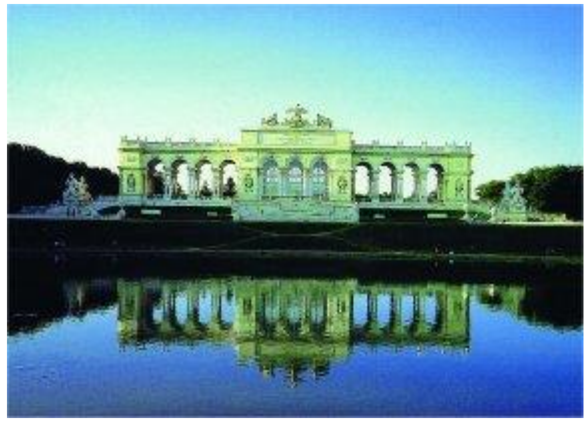
"Weg vom rechten Winkel!", "Weg von ebenen Flächen!", "Weg von Wiederholungen!" sind nicht selten Parolen, die eine neue Generation von Architekten den Vorherigen zuruft. Dabei darf man nicht aus den Augen verlieren, dass mit der Abkehr von bestimmten Strukturen keinesfalls die Abkehr von der Mathematik als Grundlage und inspirative Quelle erfolgt. Es werden lediglich die inneren Gesetzmäßigkeiten anderer Strukturen wichtig. Amorphe Formen folgen ebenso strengen mathematischen Gesetzmäßigkeiten wie rechte Winkel; es sind nur andere!

Ein gleichwohl für Mathematiker als auch für Architekten besonderer Reiz ergibt sich, wenn die beiden oben beschriebenen Funktionen von Mathematik als Prüfstein des Machbaren und Quelle der Inspiration einander ergänzen und gegenseitig bedingen. Dies passiert beispielsweise dann, wenn die Auswahl einer bestimmten mathematischen Struktur erst die Umsetzung eines Gebäudes ermöglicht. Musterbeispiele hierfür sind die "Geodesic Domes" von Buckminster Fuller, bei welchen durch die Ausnutzung geeigneter mathematischer Grundprinzipien mit einem minimalen Materialaufwand frei tragende und dennoch überaus stabile Hallen oder Kuppeln realisiert werden.

Eine weitere besondere Verbindung von Architektur und Mathematik ergibt sich, wenn die Architektur ein Denkmal für vorhandenes mathematisches Wissen einer Kultur setzt. So ist es bestimmt kein Zufall, dass in der für ihre ornamentalen Arabesken berühmten Alhambra in Granada (erbaut um das Jahr 1300) alle 17 kristallographischen Gruppen, also alle mathematisch möglichen Typen von Flächenornamenten, verwendet wurden. Ein ebenfalls bemerkenswertes Beispiel sieht man in einem von Paolo Uccello um 1445 gestalteten Fußbodenmosaik im Eingangsbereich von San Marco in Venedig: Dort finden wir eine Projektion eines Kepler-Poinsot'schen Sternkörpers - die Arbeiten und Untersuchungen Keplers, nach denen diese Objekte heute benannt sind, fanden erstaunlicherweise erst mehr als 100 Jahre später statt!

Wie aber entsteht ein solches Wechselspiel von Formfindung, Formgebung, mathematischer Notwendigkeit und metaphorischer Inspiration? Exemplarisch möchten wir hier an einigen Beispielen skizzieren, wie dieser Dialog entsteht, ein Prozess, der sich sowohl in der Vergangenheit als auch in der Gegenwart offenbart.

Symmetrie und Ornamente: Die Macht und die Kunst, gleiche Dinge zu erschaffen



Die Gloriette (1775) im Wiener Schloss Schönbrunn. Teil einer spiegelsymmetrischen Schloss- und Gartenanlage.

Der mathematische Symmetriebegriff ist eng an die Begriffe Wiederholung und Transformation gekoppelt. Mathematiker sprechen immer dann von einem symmetrischen Objekt, wenn man mit diesem eine Aktion durchführen kann, die es mit sich selbst wieder zur Deckung bringt. So ist mit der einfachen Spiegelsymmetrie eine Klappung eines Objektes verbunden.

Ein Quadrat ist in gewissem Sinne "symmetrischer" als ein gleichseitiges Dreieck: Letzteres besitzt drei Rotationssymmetrien um 0°, 120° und 240°, und drei Spiegelachsen, im Gegensatz zum Quadrat mit vier Rotationssymmetrien und ebenso vielen Spiegelachsen.

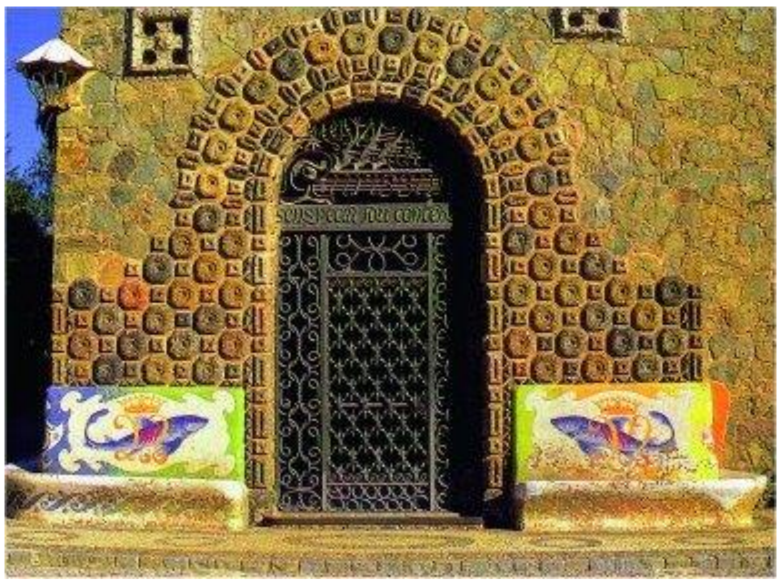
Architektonisch begegnet uns der Symmetriebegriff auf (mindestens) zwei verschiedenen Ebenen: Symmetrien im Großen, welche die globale Form eines Gebäudes oder gar einer Stadt betreffen, und Symmetrien im Kleinen, welche ihren Sinn in ornamentaler Ausschmückung eines Gebäudes finden.

Petronas-Towers in Kula Lumpur.

Zur Erzeugung von groß angelegten Symmetrien in Gebäuden müssen Teile im Wesentlichen identisch an mehreren Stellen errichtet werden. Aus heutiger Sicht erscheint dies selbstverständlich. In früheren Zeiten war die Erstellung größerer symmetrischer Bauwerke aber mit einem nicht unbeträchtlichen Aufwand verbunden. Symmetrie als stilistisches Element ist somit insbesondere in den vergangenen Jahrhunderten als Ausdrucksmittel herrschaftlicher Macht anzusehen. Diese Tendenz setzt sich bis in die Neuzeit fort, aufgrund der bauhandwerklichen Fortschritte können und müssen die Symmetrien aber in immer größerem Maßstab vorkommen. Dies kulminiert in so gigantischen Werken wie dem 1996 fertig gestellten Petronas-Türmen in Kuala Lumpur.

Symmetrien sind eine ausgesprochen verletzliche Sache. Der Symbolgehalt einer solchen Verletzung ist immens. Es ist wohl kein Zufall, dass die beiden am 11. September 2001 zerstörten bzw. beschädigten Schaltzentralen der amerikanischen Macht, die Twin Towers des World Trade Center und das Pentagon, einen beeindruckenden Grad von Symmetrie aufwiesen.

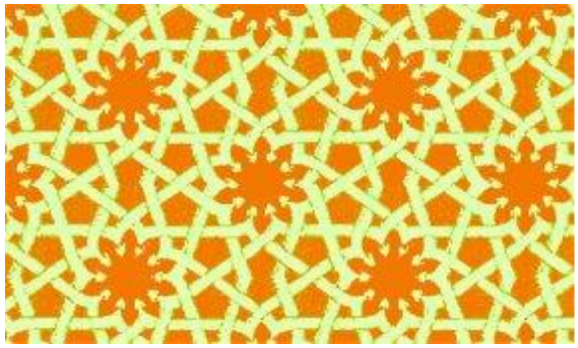
Gilt Symmetrie im Großen als Ausdruck von Macht, so gelten Ornamentik und das Auftreten von Symmetrien in filigranen Strukturen als Ausdruck künstlerischer Verfeinerung sowohl handwerklicher als auch intellektueller Art. Kleine und filigrane Strukturen lassen wesentlich mehr Raum für subtile mathematische Bezüge, eine Kunst, die in verschiedenen Kulturen zur Blüte gebracht wurde. Herausragend ist hierbei sicherlich die islamische Ornamentik. Hier wurde aus der von der Religion diktierten Not heraus, keine konkreten Gegenstände abzubilden, aufs schönste eine Tugend gemacht. Die Rosettenkultur in der Gotik und die metaphernreiche Ornamentik des Jugendstils sind weitere wichtige Vertreter.



Ornamentaler Torbogen von Gaudi.

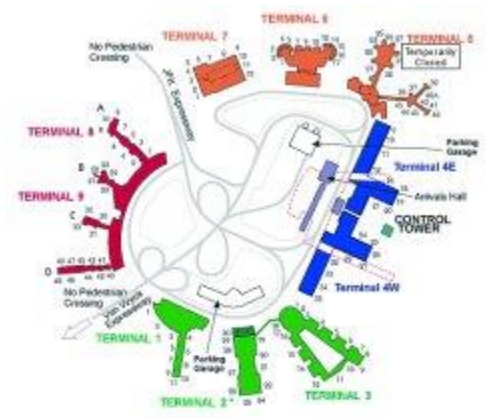
Die Beziehungen von ornamentaler Kunst zu Mathematik sind facettenreich und tief, so dass sich leicht ganze Bücher darüber verfassen lassen; hier können wir sie nur anreißen. Die Mathematik setzt in der Ornamentik dem materiell Machbaren bemerkenswerte strukturelle Grenzen. Während es beispielsweise einfach möglich ist, aus Quadraten, regulären Dreiecken und regulären Sechsecken eine regelmäßige Kachelung der Ebene zu legen, ist dies mit regulären Fünfecken nicht möglich (probieren Sie es aus!). Klassifiziert man systematisch die mathematisch prinzipiell verschiedenen Möglichkeiten, ebene Flächenornamente zu bilden, so kommt man auf die bereits oben erwähnten 17 verschiedenen kristallographischen Gruppen, in welchen unter anderem fünfzählige Drehsymmetrien prinzipiell unmöglich sind. All diese 17 verschiedenen Typen wurden in der Alhambra in Granada als Flächenornamente realisiert.

Bei solchen Hochblüten ornamentaler Kunst in verschiedenen Kulturen spielte und spielt man oftmals mit der Grenze zwischen Möglichem und Unmöglichem. "Schaut her, wir wissen genau, dass das unmöglich ist, aber wir versuchen euch an der Nase herumzuführen!" - so scheint es aus manchem Zierrat zu rufen. Ein schönes Beispiel sind die in manchen islamischen Ornamenten eingewebten regulären Fünfecke, obwohl eine globale fünfzählige Symmetrie unmöglich ist.

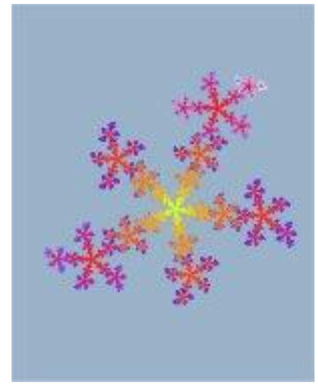


Islamisches Ornament, bei dem bewusst reguläre Fünfecke und zehnzackige Sterne eingebaut wurden.

Fraktale: Oberflächenaktive Gebäude



Terminalplan am JFK Airport in New York.

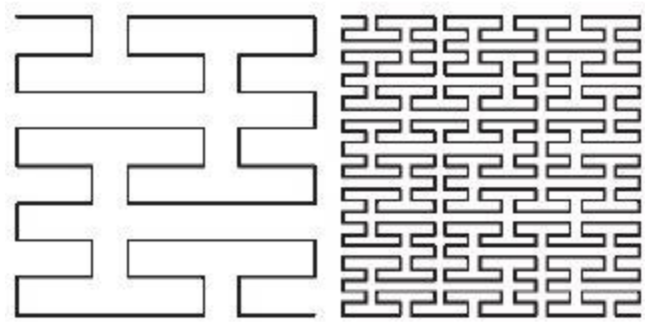


Ein mathematisches Fraktal.

Als ein weiteres eher zeitgenössisches Beispiel, sowohl in mathematischer als auch in architektonischer Hinsicht, wollen wir Fraktale betrachten. Verdoppelt man in alle Richtungen die Ausmaße eines beliebigen Gebäudes, so verdoppelt sich auch dessen Umfang, während sich die Grundfläche vervierfacht. Ist man daran interessiert, viel und großräumigen Innenraum zu schaffen, dann ist dies eine sehr angenehme Relation. Was aber, wenn es bei einem Gebäude mehr auf die Außenfläche als auf den Innenraum ankommt? Eine typische solche Entwurfssituation ist die Gestaltung von Flughäfen. Man ist daran interessiert, möglichst viele Flugzeugfinger bei verhältnismäßig kleinem Innenraum zu realisieren. Die Natur kennt ähnliche Probleme. Beispielsweise sind Bäume so gebaut, dass bei minimalem Materialaufwand möglichst viele Blätter dem Sonnenlicht entgegen gestreckt werden können, oder in der Lunge sollen auf kleinem Raum möglichst viele Lungenbläschen mit der Atemluft in Kontakt kommen. In der Mathematik studiert man bereits seit einigen Jahrzehnten Strukturen, die diese Eigenschaften erfüllen. Es sind die so genannten Fraktale, Gebilde, die sich feiner und feiner verästeln oder falten und die auf jeder Vergrößerungsstufe eine weitere filigrane Verästelung aufweisen. In der Tat bieten sich Annäherungen an solche Strukturen beim Flughafenentwurf aus den operationalen Beschränkungen quasi als Ideallösung an.

Der Begriff fraktal beschreibt hier das Verhältnis zwischen Raum, Fläche und Umfang. Normalerweise wächst eine Fläche im Vergleich zu ihrem Umfang quadratisch (man mache es sich an einem Quadrat mit Seitenlänge a, Fläche a^2 und Umfang $4a$ klar!), eine Fläche ist daher zweidimensional. Für Fraktale gilt dies nicht, ihre Dimensionen werden nicht durch ganze, sondern durch gebrochene Zahlen beschrieben.

"Fraktale Gebäude" also eine im Verhältnis zum Innenraum relativ große Außenfläche aus. In manchen Situationen ist man auch durchaus daran interessiert, möglichst viele aktive Innenwände bei gleichzeitiger maximaler Verschachtelung zu erreichen. Nicht zufällig erinnert ein Spaziergang durch das Labyrinth einer IKEA-Möbelausstellung an eine flächenfüllende Kurve, wie sie bereits von den Mathematikern Hilbert und Peano im neunzehnten Jahrhundert untersucht wurden.



Flächenfüllende Peana Kurven.

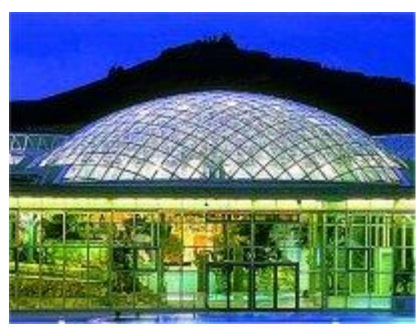
Der metaphorische Stellenwert von Fraktalen in der modernen Architektur ist nicht unbeträchtlich. Selbstähnlichkeiten, die bei Fraktalen auftreten, erlauben die Verwirklichung neuer und subtilerer Formen von Symmetrie, deren man sich vor wenigen Jahrzehnten in diesem Ausmaß nicht bewusst war. "Der Teil wird zum Abbild des Ganzen" ist eine sehr weitreichendes Gestaltprinzip, das von immer mehr zeitgenössischen Architekten aufgegriffen wird (vgl. Arbeiten von D. Libeskind, F.O. Gehrey, Ch. Jencks, P. Eisenmann und vieler anderer Vertreter der architektonischen Avantgarde). In ihm spiegeln sich Prinzipien der Ganzheitlichkeit, Gleichberechtigung, strukturellen Komplexität, Einbettung in ein größeres Ganzes wider, die Ausdruck unserer zunehmend komplexen, wissenschaftlich orientierten Welt sind.

Minimalflächen:
Wenn Weniger Mehr ist

Olympiadach in München nach Entwürfen von Frei Otto (1972).

Eine andere Teildisziplin der Architektur beschäftigt sich mit dem zum letztgenannten komplementären Problem: Wie kann man mit möglichst wenig Material eine möglichst große Halle überdachen? Diese Fragestellung ist eng verwandt mit der Frage nach optimaler Kräfteverteilung und Stabilität einer Konstruktion. Optimale Kräfteverteilung heißt hierbei, dass möglichst alle auf die Bauteile wirkenden Kräfte der Steifigkeit und Stabilität der Konstruktion selbst zu Gute kommen. Anders ausgedrückt, sollte eine solche Konstruktion keinerlei innere Verspannungen haben.

Eine nahe liegende Fertigungsmöglichkeit, von der auch häufig Gebrauch gemacht wird, besteht darin, ein Gerüst der Konstruktion als Stabwerk zu realisieren und die einzelnen Zellen der Konstruktion mit einem leichten Material z.B. Plexiglas zu verschließen. Eine ideale Kräfteverteilung ist dann erreicht, wenn die Stäbe des Gerüstes letztlich nur auf Zug oder Druck, nicht aber auf Verbiegung oder Verdrehung belastet werden. Zwangsweise führt dies zu geschwungenen Formen, da scharfe Kanten zu Scherkräften und inneren Spannungen führen würden. Solche Konstruktionen verfügen aufgrund der effektiven Ausnutzung der Ressourcen über eine verblüffende Stabilität bei gleichzeitiger optischer Leichtigkeit. Fertigungstechnisch stellen sie jedoch eine große Herausforderung dar. Durch die amorphen Formen sind selten auch nur zwei Teile identisch, und die Stablängen der Konstruktion müssten exakt vorberechnet werden.

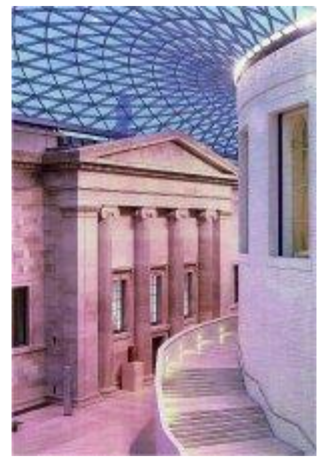


Schwimmbad Neckarsulm, Schlaich, Bergmann und Partner, 1989.

Abhilfe schafft an dieser Stelle die Wahl einer geeigneten und flexiblen Geometrie des Stabwerks. Baut man es wie beim Schwimmbad in Neckarsulm aus lauter Vierecken auf, so kann die Stablänge im Wesentlichen überall gleich gewählt werden, da die Geometrie eines Viereckrasters relativ flexibel ist. Bei all diesen Konstruktionen erweist sich die Mathematik als grundlegend strukturgebende Wissenschaft, die durch die lokalen Kriterien einer optimalen Kräfteverteilung zur global formgebenden Kraft wird. Erfreulich ist, dass hier fast immer aufgrund mathematischer Zwänge Effizienz und Ästhetik Hand in Hand gehen.

An dieser Stelle soll noch einmal ein anderer Aspekt im Zusammenspiel von Mathematik und Architektur gewürdigt werden, der wohl zu den wichtigsten Innovationen der Neuzeit gehört. In den letzen Jahren hat sich im Bereich der Fertigungstechnik für architektonische Konstruktionen ein langsamer, aber dramatischer Wandel vollzogen. Die Beschränkung auf wenige, genormte Standardteile war eine wichtige Errungenschaft der Industrialisierung, durch die die Kosten eines Gesamtgebildes entscheidend gesenkt werden konnten. Dieses Prinzip zieht sich durch die gesamte Fertigungstechnik, nicht nur durch die Architektur, beginnend mit dem Buchdruck aus einzelnen Lettern bis hinein in die aus heutiger Sicht wenig aufregende Tatsache, dass es nur noch wenige Typen von Gewindeschrauben gibt.

Durch den Einzug der rechner- und robotergestützten Fertigung ist es heute aber erstmalig möglich, jedes einzelne Teil individuell und dennoch kostengünstig anzufertigen. Die vollständige Computerisierung der Architektur vom Rohentwurf und Design im CAD-System bis zur Fräsmaschine erlöst vom Druck der Gleichmacherei und gibt die Chance, bis an die Grenze des mathematisch-physikalisch Machbaren zu gehen. Ein Prozess, bei dem Mathematik an den verschiedensten Stellen eine Rolle spielt.



Innenhof des Great Court des British Museum, 2000.

Bauten aus jüngerer Zeit legen Zeugnis dieser "Beherrschung der Technik" sowohl im Material als auch in Form ab. Beherrschung von Technik ist selbst zum Stilelement moderner Bauten geworden, wie man gut an der Überdachung des Great Court des British Museum in London sehen kann. Jeder einzelne Stab dieser Konstruktion wurde getrennt berechnet und gefertigt, was eine freiförmige Dreieckskonstruktion ermöglichte, die zuvor undenkbar war. Auch heute wirkt die Architektur also als Denkmal der mathematischen Hochkultur.

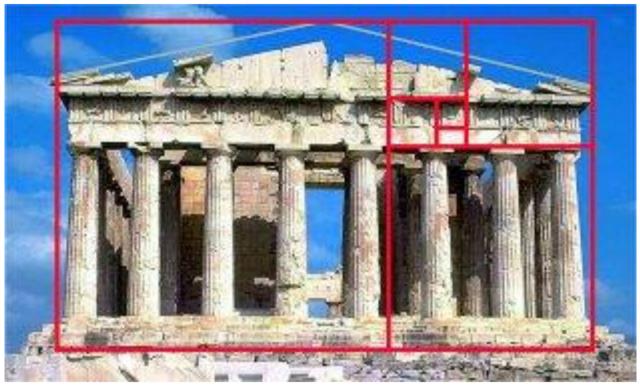
Die Welt wird komplizierter

Wie wir gesehen haben, ist das Zusammenspiel von Mathematik und Architektur ein lebendiger Prozess, der sich in fortwährendem Wandel befindet. Mittlerweile haben moderne mathematische Begriffe wie Komplexität, Chaostheorie, Topologie, Selbstorganisation, nichtlineare Dynamik und Katastrophentheorie Einzug in die Metaphernsprache der avantgardistischen Architektur gefunden. Gebäude oder Städte werden nach von ihnen abgeleiteten Prinzipien entworfen und stellen eine Art Reaktion auf die wachsende Komplexität und Vernetzung unserer Gesellschaft und wissenschaftlichen Erkenntnis dar. Nach wie vor wird es so sein, dass eine spätere Generation die Gebäude unserer Zeit nur richtig verstehen kann, wenn sie versucht, die dahinter liegenden Intentionen, gesellschaftlichen Normen und Weltanschauungen zu ergründen. Die sich in der Architektur widerspiegelnde Mathematik wird ein wichtiger Schlüssel zum Verständnis der Metaphernsprache und der strukturellen Logik von Architektur sein.

Professor Dr. Jürgen Richter,
TU München.

Professor Dr. Ulrich Kortenkamp,
TU Berlin.

Verhältnisse: Die Welt wird geordnet



Parthenon-Tempel auf der Akropolis:
Wird dieses Gebäude vom goldenen Schnitt als Gestaltungselement dominiert?

Spricht man über den Zusammenhang von Mathematik und Architektur, so darf die Analyse von Längenverhältnissen nicht fehlen. In der Absicht, harmonische und nützliche Gebäudeproportionen zu erhalten, griffen und greifen Architekten oft auf standardisierte Regeln für diese Verhältnisse zurück. Deswegen besteht bei der Analyse von klassischen Gebäuden oftmals der erste Schritt darin, die Länge von wesentlichen Grundlinien zueinander ins Verhältnis zu setzen und nach offensichtlichen und verborgenen Zusammenhängen zu suchen. Hier ist aber Vorsicht geboten: Die Willkür der eingezogenen Hilfslinien und das Akzeptieren von scheinbar leichten Abweichungen lassen mehr interpretatorische Freiheiten zu, als es zunächst scheint. So kann man oft Intentionen suggerieren, die weder beim Entwurf noch beim Bau vorhanden waren.

Nachweislich findet sich aber schon im ältesten überlieferten Ratgeber über die Errichtung verschiedener Bauformen De architectura libri decem (Vitruvius, um 30 v. Chr.) der Ratschlag, ein Atrium in den Seitenverhältnissen 3:2 oder 5:3 zu errichten. Neben ganzzahligen Teilverhältnissen spielt spätestens seit der Renaissance der Goldene Schnit eine herausragende Rolle. Er tritt natürlicherweise als das Längenverhältnis $\Phi \approx 1.61803399$ von Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck auf. Als antikes Beispiel wird stets das Parthenon auf der Akropolis herangezogen, dessen Baumeister Phidias namengebend für den in der Mathematik verwendeten Buchstaben Φ (griech. Phi) für dieses Verhältnis ist. Ob diese Analyse korrekt ist und der goldene Schnitt durch die harmonische Formgebung bedingt ist, oder ob in Wirklichkeit die ganzzahligen Zahlenverhältnisse 3:2 = 1,5 oder 5:3 $\approx$ 1,6666 zu Grunde lagen, ist allerdings ungeklärt.

Interessanter als diese Spekulationen ist das gesicherte Auftreten des goldenen Schnittes in der Natur, wo er als Proportion im Tier- und Pflanzenreich zu beobachten ist.

Leichtbau aus Schaschlikspießen

Man bekommt ein beeindruckendes Gefühl vom Zusammenspiel von Mathematik und struktureller Statik, wenn man an einem selbstangefertigten Modell beobachtet, wie regelmäßig geflochtene Stabwerke sehr schnell zu großen, stabilen und ästhetisch geschwungenen Hallenkonstruktionen führen können. Ein einfaches Modell kann man bereits aus einer Packung Schaschlikspieße errichten. Man beginnt mit vier Stäben, die man, wie im Bild 1 gezeigt, bei ca. einem Drittel Ihrer Länge zyklisch verschränkt. Legt man dieses Gebilde auf eine ebene Fläche, so weist es bereits eine leichte Tendenz zu einer Wölbung auf. Setzt man nun das Bauwerk in gleicher Weise symmetrisch nach allen Seiten verflochten fort, so entsteht eine frei tragende stabile Hallenkonstruktion.

Bild 1

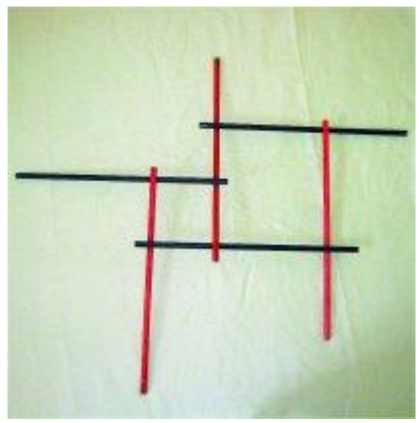


Bild 2

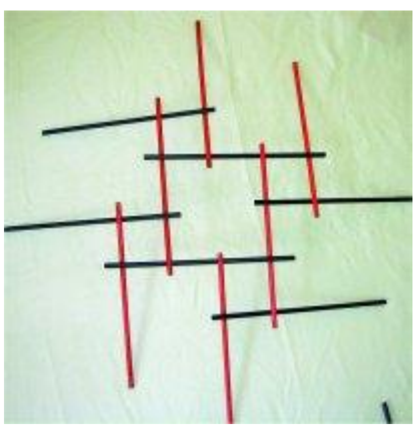


Bild 3

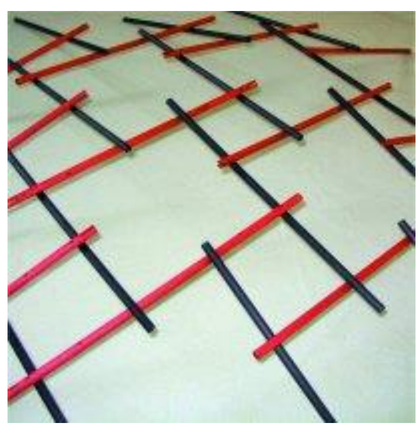


Bild 4